

# 集団免疫獲得に必要なワクチン接種量決定モデル

脇長 宏行

## A Decision-Making Model of Vaccination for Herd Immunity based on the SIR Model

Hiroyuki Wakinaga

神戸医療福祉大学紀要 第22巻 第1号

(令和3年12月)



<原著>

## 集団免疫獲得に必要なワクチン接種量決定モデル

脇長 宏行

### A Decision-Making Model of Vaccination for Herd Immunity based on the SIR Model

Hiroyuki Wakinaga

I consider a decision-making model of vaccination to achieve herd immunity under the setting of the SIR(susceptible-infected-recovered) model in which a vaccine is developed at the end of a first wave, raising the possibility of a second wave. The SIR model can be applied to analyze the effects of vaccination which means that a given percentage of susceptible people acquires herd immunity to covid-19. In this paper, I explore what proportion of the population must be vaccinated to acquire herd immunity. In other words, I compute vaccination rate for herd immunity. Also, I analyze how herd immunity depends on susceptibles and  $R_0$ (basic reproduction number). Numerical examples are provided to apply analytical results based on the infected numbers data of covid-19 in Tokyo metropolitan area as a case study.

Key words : decision-making model, theoretical epidemiology, sir model, vaccination, herd immunity, basic reproduction number, infectious diseases  
意思決定モデル, 理論疫学, SIR モデル, ワクチン接種, 集団免疫, 基本再生産数, 感染症

#### 1. はじめに

世界的規模で大流行した感染症は、ウイルスに対する長期的な免疫を付与する決定的なワクチンが無いことが1つの重要な原因である。2020年1月から始まった新型コロナウイルスの感染症流行は、もうすでに1年以上経過しても今なおまだウイルス変異を続け全世界に大きな影響を与えている。現在、政府は感染症流行を抑制する最善の手段としてワクチン接種がおこなわれていることは周知の事実である。もし決定的なワクチンが存在しないならば、政府が取りうる政策は、人と人との接触を制御するためにロックダウンや緊急事

態宣言をする<sup>1)</sup>、あるいは医療施設の拡充に努めつつ、国民のある一定割合が集団免疫を獲得するまで社会経済活動を優先することであろう。感染症が拡大したときの病床管理の問題については脇長<sup>2)</sup>を参照していただきたい。

ワクチンが開発され接種可能となったとしても、ある一定割合以上にワクチン接種がいきなり且つ感染スピードよりも迅速に実施される必要がある。したがって、人口の何割にワクチン接種を実施すれば感染症の拡大を阻止できるか否かは、ワクチン接種可能時点での未感染者数と基本再生産数(basic reproduction number)に依存する。感染症の流行の

兆しは予期せぬ時期に発生することが多いので、感染症発生時には決定的なワクチンが存在しないのが通常である。しかし、感染症がパンデミックな形で世界的な大流行となればワクチンの開発が急速に進展する。パンデミックが収束する前に、有効なワクチンが開発され接種可能となれば、ワクチンは感染症に対する有力な武器である。ワクチン接種により集団免疫の獲得が期待されるならば、迅速なワクチン接種計画が感染症拡大を阻止するための有力な政策となる。そこで本論文では、感染症の拡大を阻止するために必要なワクチンの総在庫量を分析する。第2節では、感染症の拡大を説明する数理モデルとして SIR モデルとその応用例を論じる。第3節では、SIR モデルを応用して、集団免疫を獲得するためのワクチンの接種比率を求めることにより、確保するワクチンの総在庫量を提示する。第4節では、実際の東京都の人口と新型コロナウイルス感染症のデータを使用し、感染症流行の指標を示す基本再生産数にいくつかの値を設定して、ワクチン接種比率に対しての感度分析をおこなう。さらに、基本再生産数が感染者数とワクチン接種比率にどのような影響をもたらすかを観察する。

## 2. 感染症の数理モデル

感染症の数理モデルの基本として定式化されたのが、Kermack-McKendrick モデル<sup>3)</sup>である。その中の SIR(susceptible-infected-recovered) モデルは、単純な微分方程式により表わすことができる。この数理モデルは、閉じた母集団において感染症に依存する3つの状態で構成される。

$S$  : 感染の可能性がある未感染の集団

$I$  : 感染している集団

$R$  : 感染後に回復して免疫を獲得している  
集団

$S$  はウイルスに対して感染の可能性のある集団であり、感染症のウイルスはこの集団に侵入し感染が起こる。感染が確認されると感染者は  $I$  に移動し、 $S$  の集団は小さくなっていく。 $I$  の集団では何らかの治療や自然治癒により免疫を獲得すると、回復し  $R$  の集団に移動して終了となる。

感染症は人と人との接触によって感染拡大するので、接触率の増加は感染拡大を誘発し、感染症流行による社会的費用の増加につながる。感染症の流行への対抗手段は、検査や医療の向上に加えてロックダウンや緊急事態宣言であるが、これらの政策判断は GDP の喪失というコストが掛かり、社会経済活動への影響が極めて大きい。感染症において最も基本的な概念は基本再生産数と呼ばれ、接触率(または感染率)を回復率で割って計算される。感染率が回復率より大きければ感染症の流行は拡大し、小さければ流行の拡大はないことを示す。図1は、単純な SIR モデルでの感染から回復までのプロセスを図示している。

上述の SIR モデルは、感染症の予測や分析として有効なモデルであり、新型コロナウイルスの流行分析でも応用されている<sup>4)</sup>。疫学上の観点から実際に感染症が流行したときの最も有効な手段はワクチン接種である。ワクチン接種により免疫を獲得し、症状の発症を防ぐという目的だけではなく、本来の人命を救助する(可能な限り死亡者数を減らす)という目的も達成できる。理論疫学では一般の SIR モデルにワクチン接種を考慮したモデルへ発展させている研究がある<sup>5,6)</sup>。このモデルでは、ワクチン接種をおこなった集団が全て回復するとは限らないと仮定し、ワクチンの有効期間が限定的であることにより、抗体

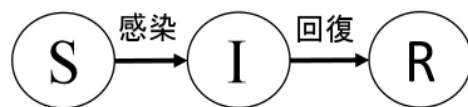


図1 単純な SIR モデルにおける感染から免疫獲得までのプロセス

がなくなり未感染者の集団に戻ることや2次感染で再度感染者集団に入ることも考えられている。

新型コロナウイルスが流行する以前によく知られているワクチンとして挙げられるのがインフルエンザのワクチンである。2009年の新型インフルエンザは、その流行初期にワクチンがなかったため世界的な流行となった。従来のインフルエンザは季節性インフルエンザであり、新型インフルエンザとは異なるものである。現在では新型インフルエンザのワクチンは存在するため感染を恐れるまでには至らないが、例年インフルエンザの流行季節になる前に、各種のインフルエンザに対する十分なワクチンを在庫として用意しておく必要がある。この問題に対し SIR モデルを用いて、最適化問題を解くことにより季節性インフルエンザと新型インフルエンザのワクチン配分を考える数理モデルがある<sup>7)</sup>。このモデルの目的は、有限であるワクチン製造の資源配分の中で、インフルエンザによる死者数を最小に抑えることである。

現実的に全世界や国の全人口に対してワクチン接種をおこなうことは不可能に近い。これはワクチンを全ての人々にいきわたらせるという問題ではなく、ワクチン接種は基本的に個人に対して強制力を求めるものではないという問題である。このような任意接種という環境の中で、感染症流行を抑えるためには、ワクチンの接種率が重要な値となる。その背景には、集団免疫を獲得することにより死者数を減らし感染症を収束させることにある。ゆえに、SIR モデルを新型コロナウイルス感

染症に適用する場合でも、死者数がワクチンの接種率にどのように依存するかを定量的に明らかにすることに意味がある。

### 3. ワクチン接種のための総在庫量の決定について

免疫を持たない感受性集団にウイルスが侵入し、感染症が流行するとき、新型コロナウイルスのような感染症発生の初期の段階では有効なワクチンを持たないのが普通である。しかも、ワクチンの開発には治験期間を含めて長い期間を要するばかりでなく、世界的流行（パンデミック）のもとでは集団免疫を達成するに可能なワクチンの総量が十分に供給される保証はない。この節では、感染症流行の第1波では有効なワクチンは存在せず、第1波が収束に向かい第2波が発生する可能性が大きい時に、ワクチンが利用可能な状況でワクチンの必要在庫量を決定する問題を考察する。

ワクチン接種による集団免疫を獲得するために、母集団としての人口の何割にワクチンを接種し、どれだけのワクチンを確保する必要があるかを論じる。そのために、全人口へのワクチン接種比率は感染症の拡散にどのように影響し、またワクチン接種比率は感染症による死者数や未感染者数と基本再生産数にどのように依存するかを知る必要がある。そこで本論文では、まず初めに新型コロナウイルス感染症の流行形態に付随して、第1波収束後に、第2波が発生する条件を議論する。さらに感染症の数理モデルで死亡率を考慮した SIR モデルに依拠して、ワクチン接種比率と

未感染者数および基本再生産数との依存関係を明らかにし、集団免疫を獲得するために必要なワクチン接種比率を議論する。

SIR モデルでは、感染者は感染し回復後に免疫を獲得すると仮定する。本論文では、佐藤・澤木<sup>8)</sup>と Pindyck<sup>9)</sup>らのモデルにワクチン接種の修正を加えて、感染者が免疫獲得する場合と死亡する場合に区分した SIR モデルを考える。したがって、死亡率を考慮した感染症モデルでは変数として以下の記号を定義する。

$S(t)$  : 任意の時間  $t$  での未感染 (感受性) 者数

$I(t)$  : 任意の時間  $t$  での感染者数

$R(t)$  : 任意の時間  $t$  での免疫獲得者数

$D(t)$  : 任意の時間  $t$  での死亡者数

SIR モデルにおいて免疫獲得と死亡を区別する意義はそれぞれ以下のようなことが考えられる。

1. 免疫を獲得した患者は社会経済活動を担うことが可能となる。
2. 死亡者数を定量化し、それが接触率にどのように依存するかを知ることで、政策としての目標を明確にすることができる。

これらから SIR モデルでは、回復後直ちに免疫を獲得し、再感染することはないと仮定することにより、 $N = S(t) + I(t) + R(t) + D(t)$  が成立する。 $N$  は母集団のサイズであり、本論文では特段の言及がない限り  $N = 1$  と仮定し、 $S(t), I(t), R(t), D(t)$  は、それぞれ母集団に占める人口比率を表す。

感染による接触率 (または感染率) を  $\beta$  とし、これは一人の感染者が他の人と接触して感染させる平均人数である。さらに、感染からの免疫獲得率を  $\gamma_r$ 、死亡率を  $\gamma_d$  とする。これらは治療や療養により免疫獲得または死亡す

る平均人数である。本モデルでは死亡に関しても再感染することはないため、感染から回復したと考えると、回復率は  $\gamma = \gamma_r + \gamma_d$  となる。そして、基本再生産数は集団の中で感染性をもつ一人の感染者が感染期間中に未感染者である感受性者にウイルスを感染させる人数の期待値を表し、 $R_0$  と表記される。ここでの  $R_0$  の定義は、

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \quad (1)$$

で表わされる。このとき、 $R_0 > 1$  ならば感染率が回復率より大きいので感染症の流行は拡大し、 $R_0 < 1$  ならば流行の拡大はないことを示す<sup>10)</sup>。

感受性を持つ母集団について次の仮定を設ける。

1. 母集団は同質の個人からなる閉じた集合である。
2. 接触率および回復率については母集団において均一である。
3. 無症状の感染者は存在しない。

さらに、 $t = 0$  では、母集団は感受性を持つ者から構成されると仮定する。これは初期状態では、感染者は存在しないと同等である。そのあと時間の経過とともにウイルスがこの母集団に侵入して感染者が母集団の中で拡大していく。以上の仮定から SIR モデルでの感染から免疫獲得あるいは死亡までの状態変化のプロセスは図 2 のようになる。

これら 4 つの状態の変動は、任意の時間  $t$  において次の 4 つの常微分方程式で与えられる。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\gamma_r + \gamma_d)I(t) \\ &= \beta I(t) \left( S(t) - \rho \right) \end{aligned} \quad (3)$$

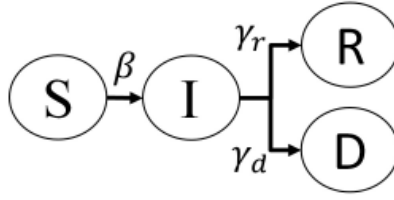


図2 死亡を考慮した SIR モデルにおける感染から免疫獲得あるいは死亡までのプロセス

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_r I(t) \quad (4)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \gamma_d I(t) \quad (5)$$

この4つの連立方程式は  $S(t), I(t), R(t), D(t)$  が相互にどのように依存しているかを示している。ただし、ここで  $\rho = \frac{1}{R_0}$  とする。 $\rho$  は基本再生産数の逆数となり、新たな1人の感染者が何人の免疫獲得あるいは死亡を起こして感染者集団から離れるのかの比率を表わすので離脱率と呼ぶ。(4)式と(5)式において感染者が免疫獲得して状態  $R$  に移動する率を  $\gamma_r$  とし、感染者が死亡して状態  $D$  に移動する率を  $\gamma_d$  と解釈すればよい。(2)式より未感染者数  $S(t)$  は  $t$  の減少関数であり、(3)式より  $I(t)$  は  $S(t) > \rho$  の下で増加し、 $S(t) < \rho$  の下で減少する。 $S(t) = \rho$  のときに感染者数は最大となるが、その最大値  $I^*$  を調べるには、 $I(t)$  を求める必要がある。そこで(3)式を(2)式で割れば、

$$\frac{dI(t)}{dS(t)} = -1 + \frac{\rho}{S(t)} \quad (6)$$

となり、(6)式を任意の時間  $t$  で積分すると、

$$\int_0^t dI(s) = \int_0^t \left(-1 + \frac{\rho}{S(s)}\right) dS(s)$$

から、

$$I(t) - I(0) = S(0) - S(t) + \rho \log \frac{S(t)}{S(0)} \quad (7)$$

を得る。 $I(t)$  を最大とする時間  $t^*$  は、

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (8)$$

の条件 ( $S(t) = \rho$ ) で決定され、 $S(t) = \rho$  を(7)式に代入すれば、最大値  $I^*$  は、 $I(0) = 0$  と  $S(0) = 1$  のもとで、

$$I^* = 1 - \rho + \rho \log \rho \quad (9)$$

となる。(9)式から  $\rho$  が1に近づくほど  $I^*$  が減少することがわかる。 $\rho = 1$  であれば、 $R_0 = 1$  ともなり、このとき  $I^* = 0$  となる。言い換えると SIR モデルでは、感染者は免疫を獲得するので未感染者数  $S(t)$  が小さいほど  $I(t)$  は大きいことを示し、パンデミックの規模は大きかったことを意味する。

次にパンデミックの第1波が時間  $T(T > t > 0)$  で収束したと仮定する。収束時点での未感染者数、感染者数、免疫獲得者数、死亡者数をそれぞれ  $S_T, I_T, R_T$  および  $D_T$  と定義する。収束時点では  $I_T$  は完全に0とはならないが、 $I(0)$  の状態に限りなく近いことから、収束した時点での  $S_T, R_T, D_T$  の状態を考えることになる。(2)式を(4)式で割ると

$$\frac{dS(t)}{dR(t)} = -\frac{\beta S(t)}{\gamma_r} \quad (10)$$

となり、(10)式を時間  $T$  で積分すると、

$$\int_0^T \frac{1}{S(s)} dS(s) = \int_0^T -\frac{\beta}{\gamma_r} dR(s)$$

から、

$$\log \frac{S_T}{S(0)} = -\frac{\beta}{\gamma_r} (R_T - R(0)) \quad (11)$$

となる。同様に(2)式を(5)式で割り対数をとれば、

$$\log \frac{S_T}{S(0)} = -\frac{\beta}{\gamma_d} (D_T - D(0)) \quad (12)$$

を得る.  $R(0) = D(0) = 0$  と  $D_T = 1 - S_T - R_T$  を用い, (11) 式と (12) 式を代入すると,

$$\frac{\gamma}{\beta} \log \frac{S_T}{S(0)} - S_T + 1 = 0 \quad (13)$$

となるので,

$$S_T = e^{R_0(S_T-1)} \quad (14)$$

を得る. ここで  $S(0) = 1$  を用いた. (14) 式から,  $S_T$  の解析解を得ることはできないが, 数値計算は可能である.  $R_0 > 1$  ならば  $S_T < 1$  であり,  $R_0 = 1$  ならば  $S_T = 1$  である.  $S_T$  が小さいほどパンデミックは激しかったことになる. (14) 式には  $S_T$  と  $R_0$  の 2 変数があるため, (14) 式の  $S_T - e^{R_0(S_T-1)}$  を 2 変数関数  $g(S_T, R_0)$  として  $S_T$  を  $R_0$  に関して全微分すると,

$$\begin{aligned} dg &= (1 - e^{R_0(S_T-1)} R_0) dS_T \\ &\quad - e^{R_0(S_T-1)} (S_T - 1) dR_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, (13) 式から  $S_T - 1$  を  $\frac{\log S_T}{R_0}$  に置き換え, (14) 式から  $e^{R_0(S_T-1)}$  を  $S_T$  に置き換えてまとめると

$$\frac{dS_T}{dR_0} = \frac{\gamma S_T \log S_T}{\beta(1 - S_T R_0)} < 0 \quad (15)$$

となる. さらに,  $D_T = \frac{\gamma_d}{\gamma} (1 - S_T)$  であるから, これを  $R_0$  に関して微分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{dD_T}{dR_0} &= \frac{\gamma_d}{\gamma} \left( -\frac{dS_T}{dR_0} \right) \\ &= -\gamma_d \left( \frac{S_T \log S_T}{\beta(1 - S_T R_0)} \right) > 0 \quad (16) \end{aligned}$$

となるので, 接触率  $\beta$  を下げれば  $R_0$  も小さくなるので最終的に死亡者数も減少する. (16) 式は,  $R_0$  を 1 単位減少させることで死亡者数が何人減少するかの定量的情報を提供している.

感染症の第 1 波収束時  $T$  での未感染者  $S_T$  は, (14) 式より  $1 \geq S_T > 0$  である. しかし,

第 1 波収束時に行動制限緩和などにより, 接触率が増加して  $\beta'$  となり,  $R'_0 > 1$  となれば,  $S_T < 1$  から感染者数  $I_T$  が存在するため, 第 2 波が発生する可能性がある. 感染症の第 1 波収束後に, この条件のもとで集団にウイルスが侵入し第 2 波の発生が予想された時に, ワクチン接種が可能になると仮定する. ワクチン接種比率を  $w$  とし, その比率は  $0 < w < 1$  とする. ワクチンが未接種である未感染者の割合は  $(1-w)S_T$  であるから, 収束時  $T$  において感染症の拡大を防ぐためには, SIR モデルのもとで  $w$  が  $(1-w)S_T R'_0 < 1$  を満たせばよい. すなわち, ワクチン接種比率で置き換えると,  $w > 1 - \frac{1}{S_T R'_0}$  であれば, 集団免疫が獲得され, 第 2 波での感染拡大は起らない. 集団免疫が獲得される閾値を  $w^*$  とし,  $w^* = 1 - \frac{1}{S_T R'_0}$  とすれば, この等式は感染症流行の拡大が  $R'_0$  に対してどのように依存しているかを表わしている. さらに, ワクチン接種比率を  $w^*$  まで高めれば集団免疫が疫学的に達成されることを SIR モデルは示唆している. もし  $S_T = 0.75$  で  $R'_0 = 2.5$  ならば  $w^* \cong 0.47$  となり, 全人口の 47% を超える人々にワクチン接種を実施すれば感染拡大を阻止することができる.

次に, 未感染者  $S_T$  にワクチン接種をおこなうと感染者数  $I(t')$  に与える影響を考える. そこで (6) 式を区間  $(T, t'), T < t'$ , で積分すると,

$$\int_T^{t'} dI(s) = \int_T^{t'} \left( -1 + \frac{\rho'}{S(s)} \right) dS(s)$$

から,

$$I(t') = I_T - S(t') + S_T + \rho' \log \frac{S(t')}{S_T} \quad (17)$$

を得る. ここで,  $T$  の時点で未感染者  $S_T$  は  $w$  の比率でワクチン接種をおこなっているため, 感染の可能性がある集団比率は  $(1-w)S_T$  である. (17) 式の  $S_T$  を  $(1-w)S_T$  に置き換え



ると、

$$I(t') = I_T - S(t') + (1-w)S_T + \rho' \log \frac{S(t')}{(1-w)S_T} \quad (18)$$

となる。(18)式の最大値は、

$$\frac{dI(t')}{dt'} = 0 \quad (19)$$

の条件 ( $S(t') = \rho'$ ) で達成されるので、 $w$  の関数としての感染者数の最大値  $I^*$  を  $I^*(w)$  とすれば、 $S_T < 1$  と  $I_T \equiv 0$  のもとで、 $S(t') = \rho'$  を (18) 式に代入すれば、

$$I^*(w) = (1-w)S_T - \rho' + \rho' \log \frac{\rho'}{(1-w)S_T} \quad (20)$$

となる。(20)式の  $w$  の導関数を求めれば、

$$\frac{dI^*(w)}{dw} = -S_T + \frac{\rho'}{1-w} \quad (21)$$

となる。感染症拡大期では、 $R'_0 > \frac{1}{(1-w)S_T} > 1$  であり、これはすなわち  $\rho' < (1-w)S_T$  を意味する。(21)式から、ワクチン接種比率を高めれば感染者数の最大値は減少する。さらに(21)式を  $w$  についてもう一度微分すると、

$$\frac{d^2 I^*(w)}{dw^2} = \frac{\rho'}{(1-w)^2} > 0 \quad (22)$$

となり、

$$w^* = 1 - \frac{\rho'}{S_T} \quad (23)$$

が感染拡大を最大限に抑えることができる閾値であることがわかる。(20)式の  $w$  の範囲を  $0 \leq w \leq 1 - \frac{\rho'}{S_T}$  と考えた場合、これらの極値は、

$$\lim_{w \rightarrow 0} I^*(w) = S_T - \rho' + \rho' \log \frac{\rho'}{S_T} \quad (24)$$

$$\lim_{w \rightarrow 1 - \frac{\rho'}{S_T}} I^*(w) = 0 \quad (25)$$

となる。ワクチン接種比率を  $1 - \frac{\rho'}{S_T}$  まで高めれば感染者数の最大値を 0、すなわち感染症は消滅する。

最後に、ワクチン接種をおこなってから発生した第 2 波が収束した際の未感染者を確認する。時間  $T'$  ( $T' > T$ ) で第 2 波が収束したと仮定して、収束時点での未感染者数、免疫獲得者数、死亡者数をそれぞれ  $S_{T'}$ ,  $R_{T'}$ ,  $D_{T'}$  と定義する。(10)式を区間  $(T, T')$ ,  $T < T'$  で積分すると、

$$\int_T^{T'} \frac{1}{S(s)} dS(s) = \int_T^{T'} -\frac{\beta'}{\gamma_r} dR(s)$$

から、

$$\log \frac{S_{T'}}{(1-w)S_T} = -\frac{\beta'}{\gamma_r} (R_{T'} - R_T - wS_T) \quad (26)$$

となる。ここで、 $S(T) = (1-w)S_T$ ,  $R(T) = R_T + wS_T$  を用いた。同様に、(12)式を  $D(T) = D_T$  を用いて表わすと、

$$\log \frac{S_{T'}}{(1-w)S_T} = -\frac{\beta'}{\gamma_d} (D_{T'} - D_T) \quad (27)$$

を得る。 $D_{T'} = 1 - S_{T'} - R_{T'}$  を用い、(26)式と(27)式を代入すると、

$$\frac{\gamma}{\beta'} \log \frac{S_{T'}}{(1-w)S_T} - R_T - wS_T - D_T - S_{T'} + 1 = 0 \quad (28)$$

となるので、

$$S_{T'} = (1-w)S_T e^{R'_0(S_{T'} + R_T + wS_T + D_T - 1)} \quad (29)$$

を得る。第 2 波の収束時点での  $S_{T'}$  は、第 1 波の時と同じように表わすことができ、さらに第 1 波収束時の状態に依存していることがわかる。したがって、ワクチン接種を考慮した第 2 波の感染収束時の  $S_{T'}$  は、(29)式の解である。感染者数や救命に対する政策目標が明確ならば、(28)式を満たす  $S_{T'}$  に対してワクチン接種比率  $w^*$  を数値的に求めることが可能である。

表 1 複数の基本再生産数に対するワクチン接種比率の閾値とワクチン総量

$R'_0$	1.2	1.5	1.8
$\rho'$	0.8333	0.6667	0.5556
$w^*$	0.1566	0.3253	0.4378
$V$	2176873	4521126	6083961

そのようにして導き出されたワクチン接種比率を  $w^*$  とした場合、集団免疫を獲得するためには、 $(1 - w^*)S_T R'_0 = 1$  を満たす必要があることから、ワクチン接種対象者の総数が  $N$  ならば在庫として用意しなければならないワクチンの総量  $V$  は、

$$V \geq Nw^* = N\left(1 - \frac{\rho'}{S_T}\right) \quad (30)$$

となる。このとき  $V$  は現実を考慮して、 $w^*$  で求められた必要ワクチン数以上の在庫を確保しておかなければならない意味で、 $V \geq Nw^*$  としている。さらに、ワクチン接種の効果の観点から、2 回の接種を必要とするならば  $N$  を 2 倍することにより対応可能である。

#### 4. 数値例

まず初めに、未感染者にワクチンを接種することにより、感染者がどのように減少していくかを数値的に確認する。仮定として、ワクチン接種は年齢に関わりなくおこなわれるものとする。そして、第 3 節で述べたように回復した感染者は免疫を獲得あるいは死亡するという仮定に合わせて、ワクチンを接種すればそれ以降に感染することはないとする。使用するデータ例として 2021 年 5 月から東京都で起こっていた英国を起源とする変異種アルファ株の収束から、2021 年 7 月から起こっているインドを起源とする変異種デルタ株への感染拡大の期間を扱う。このデータを本論文のモデルに当てはめると、変異種アル

ファ株が第 1 波、変異種デルタ株が第 2 波となる。一般的には、変異株の種類によりワクチンの有効性も異なり、ワクチンの種類にも様々な製薬会社が存在する。しかし、本論文では第 1 波と第 2 波の変異株は同等であると考え、それに対するワクチンも 1 種類で、有効性が 100% であるとして数値計算をおこなう。SIR モデルでは人流の観点から、閉じた母集団として 1 都 3 県とするのが望ましいが、ここでは県をまたぐ移動制限があると考え、便宜的に閉じた母集団として東京都のみを扱う。東京都の全人口は、2020 年の国勢調査から 14,064,696 人であり、これを母集団  $N$  とする。

次に、アルファ株による感染の収束時点  $T$  は、厚生労働省 (<https://www.mhlw.go.jp>) のオープンデータを参照して決定する。アルファ株による感染のピークを越えたのは 2021 年 5 月 15 日ぐらいで、デルタ株による新しい感染拡大の波が来たのが 7 月 14 日ぐらいである。この 2 か月間で 1 日の新規感染者数が最少である日を収束時点  $T$  とすれば、2021 年 6 月 14 日の 209 人がこれに該当する。さらに、2021 年 6 月 14 日終了時点での未感染者  $S_T$  を計算する。この場合、 $S_T = N - I_T - R_T - D_T$  となるので 2021 年 6 月 14 日までの累積感染者数を調べればよい。厚生労働省が統計を取り始めた 2020 年 1 月 26 日から 2021 年 6 月 14 日までの累積感染者数は 166,559 人で、これにより未感染者  $S_T$  の集団は、13,898,137 人でその比率は 0.9881 となる。

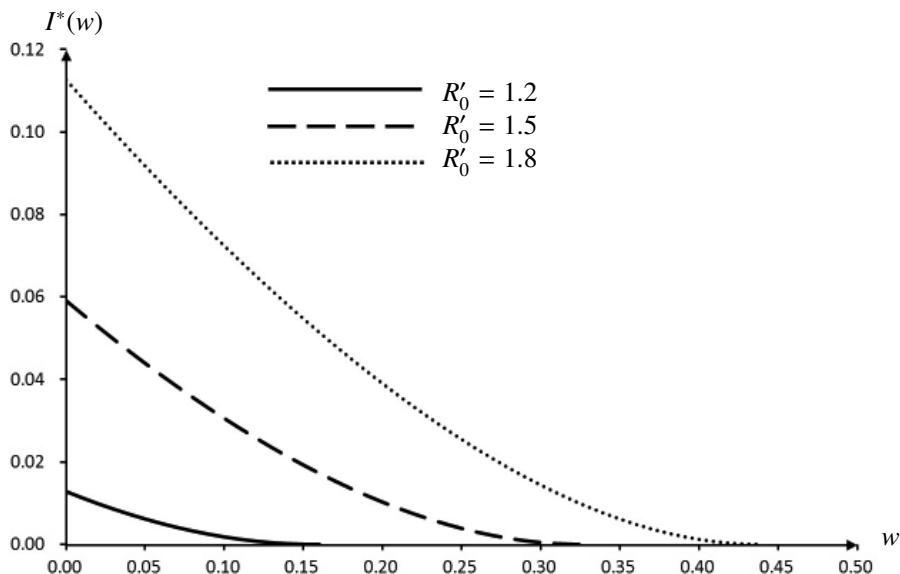


図3  $w$  の関数における感染者数の最大値の推移

そこで、 $S_T = 0.9881$  として  $R'_0$  の複数の値に対してワクチン接種比率を変動させて、(20) 式の  $I^*(w)$  を観察する。  $R'_0 = 1.2, 1.5, 1.8$  とした場合の  $\rho', w^*, V$  は表 1 の通りとなる。(23) 式の比率でワクチンを接種すると、 $I^*(w)$  は (25) 式から 0 になるため、それぞれの  $R'_0$  に対して、 $w$  を  $0 \leq w \leq 1 - \frac{\rho'}{S_T}$  の範囲で連続的に動かすことで得られた  $I^*(w)$  の推移を図 3 に表わす。図 3 からそれぞれの  $R'_0$  でワクチン接種比率を高めていけば、感染症は抑えられていることが観察できる。例えば、 $R'_0 = 1.5$  でワクチン接種がおこなわれない場合は、 $S_T$  の約 5.9% が感染者数となるが、 $S_T$  の約 32.5% を超える人々にワクチン接種を実施すれば集団免疫が獲得され感染症は収束することがわかる。現実的に考えると、それほど高くないワクチン接種比率であるが、これはワクチンに対する有効性がどの個人についても 100% であると仮定しているためである。ワクチンの有効性にバラつきが見られるならば、ワクチン接種比率は図 3 の結果よりも高めなければならない。

実際に東京でアルファ株の収束からデルタ株による感染拡大が起こっているように、収束時点  $T$  では、以降に起こる第 2 波がどのくらいの感染規模になるかはわからない。そこで次に、第 2 波での基本再生産数  $R'_0$  の変動が感染者数とワクチン接種比率にどのような影響を与えるのかを観察する。  $R'_0 > 1$  の条件で感染拡大が引き起こされるので、 $1.0 \leq R'_0 \leq 5.0$  の範囲でワクチン接種がおこなわれない場合の感染者数の最大値とその感染者数に対するワクチン接種比率の閾値を計算する。  $S_T$  は先程と同じように  $S_T = 0.9881$  とする。感染者数は (20) 式からワクチン接種がおこなわれない場合の感染者数の最大値  $I^*(0)$  を計算することになる。ワクチン接種比率の閾値は (23) 式から計算される。図 4 は  $R'_0$  の変動による  $I^*(0)$  と  $w^*$  の推移を表わしたものである。図 4 から感染者数の最大値は  $R'_0$  に対してある程度均一的に伸びていくことがわかる。  $R'_0 = 5.0$  の時点では、 $I^*(0)$  が 0.5 近くまで上昇していることから、 $S_T$  の約半数の人が感染するという結果になっている。ワク

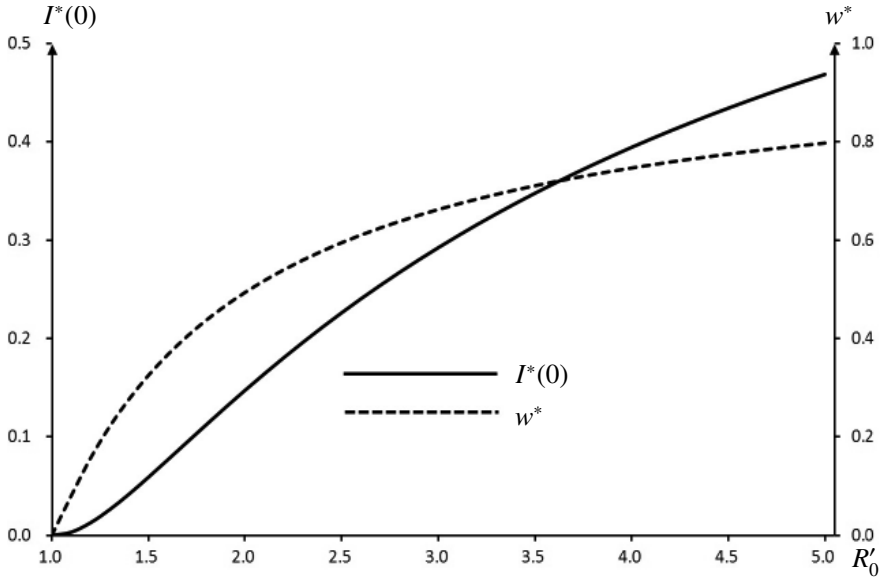


図4  $R'_0$ の変動による感染者数の最大値とワクチン接種比率の閾値の推移

チン接種比率の閾値は、 $1.0 < R'_0 \leq 2.5$  の範囲では  $w^*$  が急な傾きを見せている。これは、さらなる感染拡大を防止するためのワクチン接種であると考えられる。 $R'_0 > 2.5$  以降の  $w^*$  の増加率はそれほど高くないが、基本再生産数が高い状態では、もうすでに感染症がまん延していることを表わしている。感染症がまん延している状態でワクチンが存在しないならば、感染者が著しく増加するため、多数の人が回復あるいは死亡という集団に入ることにより集団免疫を獲得することになる。したがって、死亡者数を極力減少させるためのワクチン接種と考えてもよい。結論的には、先の見えない感染拡大の波に対し、事前に集団免疫を獲得し、感染者の増加率を下げるためにはワクチン接種比率を高めなければならない。

## 5. むすびにかえて

本論文では、ワクチン接種が第1波収束後で第2波が始まる前に利用可能であると仮定し、その仮定のもとで集団免疫を獲得する

ためのワクチン接種比率を理論的に示し、人口に対する必要なワクチンの在庫数を提示した。さらに、基本再生産数の増加による感染流行を抑える政策としてワクチン接種が重要であることを示した。

基本再生産数が増加する原因は接触率の増加が主であると考えられる。それは社会経済活動による人流の増加を意味する。第1波収束時点  $T$  に対し、 $T$  以降において第2波の発生可能性があるならば、 $T$  での感染者数は0ではなく未感染者も1でもない。すなわち、 $0 < S_T < 1$  である。そこで、第1波と第2波の接触率の増加分  $\beta' - \beta$  に対し、ワクチン接種という対策を取らなければならない。ワクチン接種が可能なときの基本再生産数の閾値  $R'_0$  と  $T$  における基本再生産数の閾値  $R_0$  を比較すると、

$$R'_0 = \frac{(1-w)\beta'}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma} = R_0$$

が成立する。ワクチンが利用可能な場合は  $R'_0$  が  $R_0$  より低く評価される。したがって、第2波発生時の接触率の増加分に対するワクチン

の追加的必要量は, (30) 式より  $\beta' > \beta$  に対して,

$$N(w^* - w) = \frac{N\gamma}{S_T} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right) > 0$$

となる.

収束時点  $T$  において  $\gamma = 1$  で  $\beta = 1.5$  ならば  $R_0 = 1.5$  である. ここで  $w = 0.33$  で  $S_T = 0.5$  ならば, 第 2 波が起こるためには  $R'_0 > \frac{1}{(1-w)S_T} \cong 3.0$  であるので  $R'_0$  が 3.0 以下ならば第 2 波は起らない. すなわち, ワクチンが存在するならば接触率を 1.5 の 2 倍である 3.0 まで高めることが可能となる. ワクチンの必要在庫数は, 第 1 波収束時の  $S_T$  と第 2 波の  $R'_0$  が正確に計算できれば, (30) 式から求めればよい. もしワクチンが無いときはロックダウンや緊急事態宣言によって行動制限をおこない, 接触率を 33% 以上削減しなければ第 2 波は回避できないということである. 国民に行動制限を求めると, それに応じて社会経済活動は縮小する. ゆえに, 感染症のコントロールと社会経済活動を両立するためには, ワクチンが不可欠であることがわかる.

今回の議論では, SIR モデルを基に感染から回復あるいはワクチン接種をおこなえば, 再感染はないものと仮定した. しかし, 新型コロナウイルスに例えると, ワクチンの有効期間は未だ未知であり, ワクチン接種をおこなっても再感染の恐れはある. したがって, SIR モデルに対して再感染を考慮することは, SIS モデルの応用を考えることにつながる. さらに, 数値例では集団内の分類は考慮せずに計算をおこなったが, 現実的には年代別や地域別により感染状況が変わってくるため, 感染者数やワクチン接種比率の結果次第では, 取りうる政策も異なってくるであろう. 新型コロナウイルス感染症の流行はこれまでに我々のあらゆるところにおいて, 甚大な影響を与えている. しかし, これまで感染症は結

果として集団免疫の獲得により乗り越えられてきた. 集団免疫を獲得するには, 長期的な医療や経済面での政策が必要である. ゆえに, 感染症ウイルスと共存していかなければならない中では, 有限である医療資源を効率的に配分して, 社会経済活動をおこなえるような政策をたてていかなければならない.

## 参考文献

- 1) Oum, T.H. and Wang, K. : Socially optimal lockdown and travel restrictions for fighting communicable virus including COVID-19, *Transport Policy*, 96, pp.94-100, 2020
- 2) 脇長宏行: 感染症における病床管理モデル, 神戸医療福祉大学紀要, 第 21 巻, 第 1 号, pp.15-21, 2020
- 3) Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. : A contribution to the mathematical theory of epidemic, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 115(772), pp.700-721, 1927
- 4) Cooper, I., Mondal, A., and Antonopoulos, C.G. : A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities, *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 2020
- 5) Arino, J., McCluskey, C.C. and Driessche, P.V.D. : Global results for an epidemic model with vaccination that exhibits backward bifurcation, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 64(1), pp.260-276, 2003
- 6) Kovacevic, R.M. : Stochastic contagion models without immunity: their long term behaviour and the optimal level of treatment, *Central European Journal of Operations Research*, 26, pp.395-421, 2018
- 7) 西浦博, 合原一幸: 感染症流行の数理モデ

ルによるインフルエンザワクチン製造の資源配分の最適化, 生産研究, 第 61 巻, 第 4 号, pp.181-187, 2009

- 8) 佐藤公俊, 澤木勝茂: レベニューマネジメント, 共立出版, 2020
- 9) Pindyck, R.S. : COVID-19 and the welfare effects of reducing contagion, *Working Paper*, 27121, 2020
- 10) Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., and Metz, J.A.J. : On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious-diseases in heterogeneous populations, *Journal of Mathematical Biology*, 28, pp.365-382, 1990