

# 感染症における病床管理モデル

脇長 宏行

A Hospital Bed Allocation Model with Infectious Diseases

Hiroyuki Wakinaga

神戸医療福祉大学紀要 第21巻 第1号

(令和2年12月)

<原著>

## 感染症における病床管理モデル

協長 宏行

### A Hospital Bed Allocation Model with Infectious Diseases

Hiroyuki Wakinaga

In this paper I consider a hospital bed allocation model with infectious diseases where the patient consists of two types - normal and infected. It is well known from statistical surveys on covid-19 that the infected inpatient brings about lower remuneration and higher costs for treatment than for the normal inpatient. Therefore, many hospitals which accept the covid-19 infected are facing management difficulties. I show that there exists an optimal allocation policy for hospitals beds so as to maximize the expected total revenue consisting of the general concave remuneration from medical treatment and cancellation cost functions. In addition, I explore an optimal allocation policy of the static allocation model with limited capacity of hospital beds, based on the airline seat allocation model. I figure out an optimal number of hospital beds for the infected inpatient if the numbers of two types inpatients are independently normally distributed.

Key words : revenue management, allocation problem, hospital bed, hospital management, infectious diseases  
収益管理, 配分問題, 病床, 病院, 感染症

#### 1. はじめに

今日の新型コロナウイルスの流行は、そのウイルスの真の性質が今尚不確実であるため、患者の受け入れ体制に様々な問題を提起している。感染症患者を受け入れるか否かに関わらず、新型コロナウイルスの流行により多くの医療機関は来院患者数が大きく落ち込んで病院経営を圧迫している。マスコミ等の報道によれば、感染者を受け入れ治療に対応する多くの病院は、今までほとんど経験したことのない様々な困難に直面している。従来

の収益の源泉であった健康診断や一般・救急外来等への来院者数が減少し、それに加えて本来おこなうべき手術が延期になる中で、新型コロナウイルス感染症患者を受け入れることにより病床稼働率が大幅に減少している。新型コロナウイルスの流行とこれへの対策が長期戦になれば病院経営を圧迫するだけでなく地域医療の崩壊が危ぶまれる。

このような未知な感染症が流行している状況の中で考えるべき課題は、感染症患者用に用意する病床数であろう。感染拡大が始まると様々な要因(政府の対策や季節など)から、新規感染者数は増減を繰り返すことになり、それに対して受け入れる病院側はその度に感

染症患者用とそれ以外の患者用（ここでは一般患者と呼ぶ）の病床数を調整しなければならない。これら異なるタイプの患者へ病床数を準備することが病院の収益に大きく関係すると言ってもよい。それは病院の収益管理の必要性を説いている。

医療崩壊の起る原因として2つ考えられる。第1の原因は、治療を必要とする患者に医療サービスを提供できないことである。医療システムの容量は、過去のデータに基づいて医療を必要とする人数（人口に占める割合）に対応できる範囲で構築されるので、この容量を超える事態（例えばパンデミック）に対応できなくなる。第2の原因は、未知な感染症の大流行による大きな環境変化により病院経営が継続不可能となる財政悪化である。本論文では、感染症の大流行の下で収益管理の観点から医療崩壊を回避する1つのモデルを論じる。

収益管理は、様々な産業の企業において経営上の問題解決や利益改善のため、その手法や理論が研究されてきた<sup>1,2)</sup>。病床の収益管理の問題を考えるにあたって、航空機の有限である座席において、正規運賃と割引運賃の需要を考慮する最適配分政策<sup>3,4)</sup>と正規期間と特価期間が存在する季節商品に対して、この2つの期間の需要を考慮した最適発注政策<sup>5)</sup>を取り上げる。これらを病院の問題に置き換えると、前者は限りある病床の中で感染症患者用と一般患者用の病床配分問題であり、後者は病院の中で別で新たに感染症用の診療科を設けるときの必要な病床数を考える問題である。そこで本論文では、現実的な観点から前者の航空機の収益管理モデルを応用して、病床の需要にあたる感染症患者と一般患者に対して適正な受け入れ割合を考えることで病院の期待収益を最大にする病床管理モデルを提案する。

## 2. 感染症患者と一般患者の病床配分モデルの定式化

感染症が流行したとき、病院の収益管理としての病床管理モデルには2つの課題がある。第1の課題は、感染症患者とそれ以外の患者（ここでは一般患者と呼ぶ）を受け入れる診察料・費用や医療スタッフの数が異なることに着目して、それぞれの病人への医療スタッフと病床構成をどのようにデザインするかということである。2つ目の課題は、感染症患者と一般患者が必要とする医療設備・人員の費用を所与としてそれぞれの患者ごとの病床数の配分を決定する問題である。病院経営の視点に特化して上記の第2のテーマについて主として議論する。

本論文では、一般論として法律的な制約がないような感染症を想定した中での病床管理モデルを論じることとする。この節では病床を使用する入院患者の枠内で、その病院収益の源泉である入院診察収入を所与として感染症患者と一般患者の2種類の需要からなる病床配分の基本モデルを説明する。病床は、すべて個室とし、感染症患者と一般患者に使用できる病床を自由に配分できることと仮定する。病床配分モデルでは以下の記号等を定義する。

$X$ ：感染症患者の需要量（確率変数）

$Y$ ：一般患者の需要量（確率変数）

$\pi_1$ ： $X$ からの単位あたりの診療収入

$\pi_2$ ： $Y$ からの単位あたりの診療収入 [ $\pi_1 \leq \pi_2$ ]

$p_1$ ：感染症患者の受け入れを断る単位あたりの費用

$p_2$ ：一般患者の入院を断る単位あたりの費用  
[ $p_1 \leq p_2$ ]

$C$ ：総病床数（病院の全容量）

$I$ : 感染症患者用病床数の上限 [ $0 \leq I \leq C$ ]

ここで  $I$  が決定変数であり、 $X$  と  $Y$  は互いに独立な確率変数としその確率密度関数をそれぞれ  $f(x)$ ,  $g(y)$  とする。この時、病院全体の期待収益  $R(I)$  は、

$$\begin{aligned} R(I) &= \pi_1 E \left[ \min \{ X, I \} \right] + \pi_2 E \left[ \min \{ Y, C - I \} \right] \\ &\quad - p_1 E \left[ \max \{ 0, X - I \} \right] \\ &\quad - p_2 E \left[ \max \{ 0, Y - (C - I) \} \right] \\ &= \pi_1 \left[ \int_0^I x f(x) dx + \int_I^\infty I f(x) dx \right] \\ &\quad + \pi_2 \left[ \int_0^{C-I} y g(y) dy + \int_{C-I}^\infty (C - I) g(y) dy \right] \\ &\quad - p_1 \int_I^\infty (x - I) f(x) dx \\ &\quad - p_2 \int_{C-I}^\infty (y - C + I) g(y) dy \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで、この  $R(I)$  を最大にする必要条件は、

$$\frac{dR(I)}{dI} = 0 \quad (2)$$

であるので、最適な感染症患者への配分病床数  $I^*$  を選ぶために式 (1) を  $I$  について微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dR(I)}{dI} &= (\pi_1 + p_1) \int_I^\infty f(x) dx \\ &\quad - (\pi_2 + p_2) \int_{C-I}^\infty g(y) dy \end{aligned} \quad (3)$$

となり、式 (2) から

$$(\pi_1 + p_1) \int_I^\infty f(x) dx = (\pi_2 + p_2) \int_{C-I}^\infty g(y) dy \quad (4)$$

となり、

$$\int_I^\infty f(x) dx = \frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} \int_{C-I}^\infty g(y) dy \quad (5)$$

を得る。次に  $R(I)$  を最大にする十分条件は、

$$\frac{d^2 R(I)}{dI^2} < 0 \quad (6)$$

であるので、式 (3) を  $I$  についてもう 1 度微分すると、

$$\frac{d^2 R(I)}{dI^2} = -(\pi_1 + p_1) f(I) - (\pi_2 + p_2) g(C - I) \quad (7)$$

となり、明らかに式 (6) が成立して、 $R(I)$  は  $I$  に関して凹関数になる。式 (5) を満たす  $I$  は式 (1) を最大とする最適な感染症患者への配分病床数である。ここで式 (5) から決定される配分病床数が  $C$  未満の場合を  $I'$  とすると、最適な感染症患者への配分病床数  $I^*$  は、

$$I^* = \min \{ C, I' \} \quad (8)$$

で与えられる。式 (5) において  $(\pi_1 + p_1) < (\pi_2 + p_2)$  である。

次に、式 (5) を満たす  $I'$  が  $0$  と  $C$  間に存在する条件を調べる。式 (5) の左辺は、 $I$  の減少関数であり、 $I$  の値により以下の確率密度をとる。

$$\int_I^\infty f(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{if } I = 0 \\ Pr[X > I] & \text{if } 0 < I < C \\ Pr[X > C] & \text{if } I = C \end{cases}$$

式 (5) の右辺は、 $I$  の増加関数であり、 $I$  の値により以下の確率密度をとる。

$$\begin{aligned} &\frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} \int_{C-I}^\infty g(y) dy \\ &= \begin{cases} \frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} Pr[Y > C] & \text{if } I = 0 \\ \frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} Pr[Y > C - I] & \text{if } 0 < I < C \\ \frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} & \text{if } I = C \end{cases} \end{aligned}$$

式 (5) において、 $I = 0$  で  $1 > \frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} Pr[Y > C]$  となり、かつ  $I = C$  で  $\frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} > Pr[X > C]$  が成立するならば式 (8) で与えられる  $I^*$  が  $0$  と  $C$  間に一意に存在することがわかる。図 1 は、このことを図示したものである。図 1 から明らかなように、もし  $\frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} < Pr[X > C]$  ならば、 $I^* = C$  となり、全病床を感染症患者に配分するのが最適である。なぜなら、この場合、感染症患者の需要が一般患者からの収益と比較して十分に大きいからである。このモデルでの仮定は、 $X$  と  $Y$  が独立であること

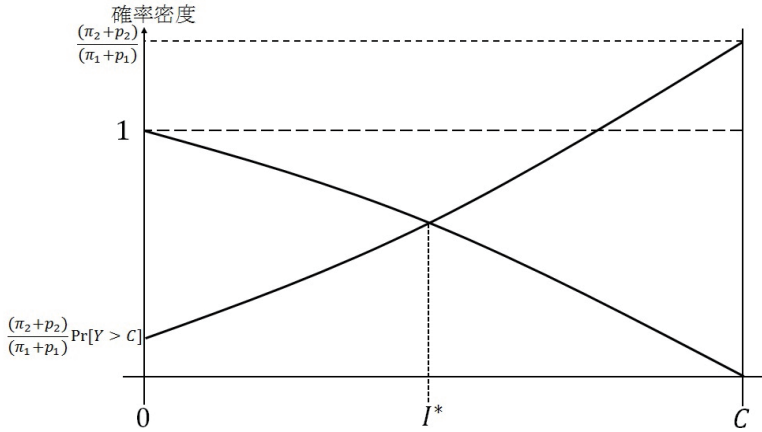


図1 感染症患者への最適な病床配分数の上限

に加えて、感染症患者の需要  $X$  の到着は一般患者の需要  $Y$  のそれと混在して到着すると仮定している。 $X$  と  $Y$  が独立しているという仮定は、感染症患者の需要  $X$  を一般患者の病床に移送する可能性を排除するなど一般患者の領域から密閉されていることを仮定している。式 (5) を観察すれば分かるように、感染症患者に配分する病床数は、比率  $\frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)}$  と  $Y$  の確率分布ばかりでなく  $X$  の需要の分布にも依存している。式 (5) の右辺カッコの中のパラメータについて、式 (4) を観察すると、左辺  $(\pi_1 + p_1)$  は需要が  $I$  以上という条件のもとで感染症患者からの限界収益と逸失収益の和であり、右辺は一般患者からの需要に用意された病床数  $(C - I)$  を超過した時の収益と逸失収益の期待値である。ゆえに、式 (5) のもう一つの解釈は、左辺  $Pr[X > I]$  が右辺  $\frac{(\pi_2 + p_2)}{(\pi_1 + p_1)} Pr[Y > C - I]$  を上回る限り感染症患者を受け入れることが最適であることを提案している。

### 3. 数値例

ここでは、感染症患者と一般患者の需要の分布関数が正規分布の下で最適な  $I^*$  が存在

し、 $R(I)$  が  $I$  に関して凹関数であることを数値的に確認する。 $I^*$  を算出するための各パラメータを、 $\pi_1 = 30, \pi_2 = 60, p_1 = 20, p_2 = 30, C = 100$  とする。さらに、感染症患者と一般患者の需要量を3つのパターンで考える。正規分布にしたがって平均を  $\mu$ 、標準偏差を  $\sigma$  として表1のように設定する。パターン1は需要量の平均が総病床数以内に収まる可能性が高い場合、パターン2は感染症患者の需要量が総病床数を超過する確率が大きい場合、パターン3は一般患者の需要量が総病床数を超過する可能性が高い場合をそれぞれ想定する。

はじめに、上記のデータを式 (5) に当てはめそれぞれの需要パターンで最適配分政策にどのような影響を与えるか分析する。図2はその結果を表わしている。それぞれの需要パターンで  $I$  が増加するにつれて確率密度の値が減少していくのが式 (5) の左辺にあたり、反対に確率密度の値が増加していくのが式 (5) の右辺にあたる。図2から全ての需要パターンで唯一の最適な  $I^*$  が存在していることが観察できる。

パターン1の結果は、感染症患者と一般患者の需要量之和が総病床数以内に収まることか

表1 数値解析のための需要データ

平均・標準偏差	パターン1		パターン2		パターン3	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
感染症患者	50	20	100	40	40	15
一般患者	50	15	30	10	100	30

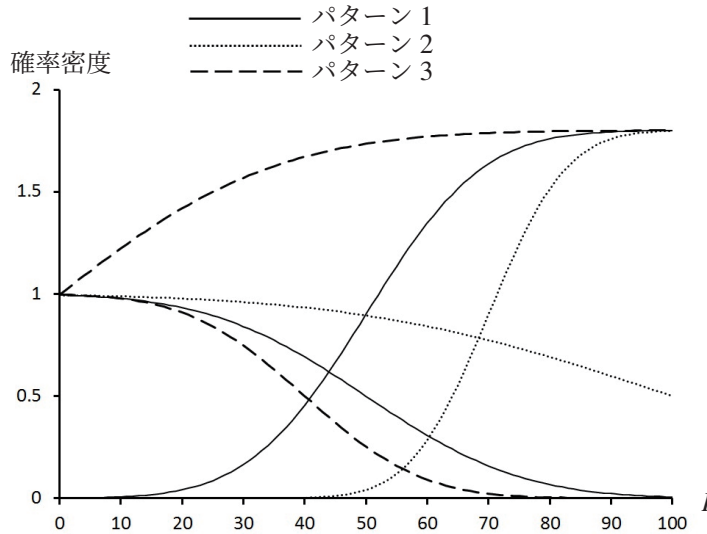


図2 感染症患者への最適病床配分率

ら、ほとんどの感染症患者に病床が与えられていることがわかる。パターン2の結果は、ほとんどの一般患者を優先的に受け入れ、その残りを感染症患者に配分し総病床数を超過した分の感染症患者は受け入れを断られていることがわかる。パターン3の結果は、収益性の高い一般患者数が十分大であるので、ほとんどの感染症患者は受け入れを断られていることがわかる。これは収益率が大きな多くの一般患者をより多く受け入れることが、収益管理の観点から望ましいという結果を表わしている。

次に、式(1)に上記のデータと確率変数である  $X$  と  $Y$  に実数値を入れて期待収益の推移を見る。ここでは、パターン1から3の  $X$

と  $Y$  はそれぞれの  $\mu$  を実数値とする。図3は期待収益の結果を表わしている。図3から全ての需要パターンで  $R(I)$  が  $I$  に関して凹関数であることがわかる。3つのパターンで期待収益の極値を比較すると一般患者を多く受け入れているパターン3が最も大きく、感染症患者を受け入れるほど期待収益の極値は小さくなっている。これは感染症の下での病院経営に喩えると、パターン3の収益は感染症が流行していない状態での病院の収益と同等であることがいえる。そこにパターン1と2のように、感染症患者を受け入れることで収益が圧迫されている状態になっていることを表わしている。

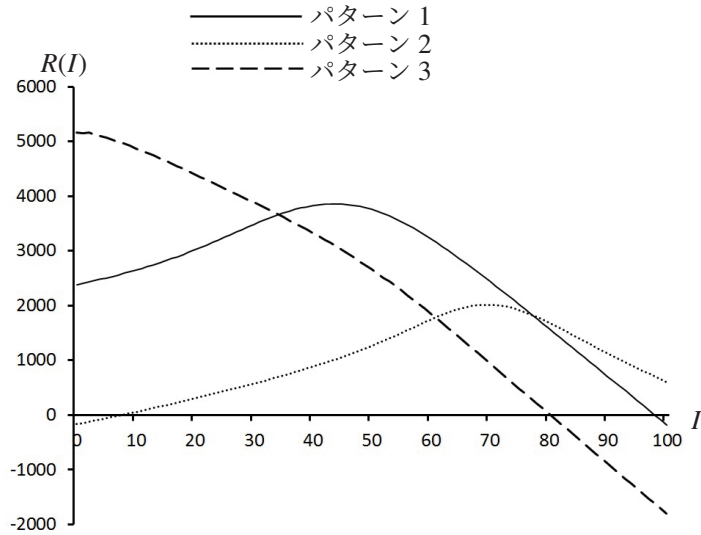


図3 感染症患者への病床配分による期待収益

#### 4. おわりに

本論文では、未知な感染症が病院経営を圧迫している状況に鑑み、収益管理の視点から感染症患者と一般患者の最適な受け入れ数を決定する病床配分モデルを提示した。このモデルの短所として次の4点を挙げるができる。

1. 感染症患者と一般患者からの2種類のみの診察料体系である。現実の病院は、2種類以上の診察料体系を持つ診療科を擁している。
2. 計画期間が明示的に設定されていない。ゆえに、感染症患者が回復して退院することによる空き病床の存在を考慮していない。
3. 感染症患者の数が受け入れ限度数に達したら、感染症患者の受け入れを打ち切るのので、たとえば感染症患者少なくとも一般患者の受け入れを再開しない。
4. 式(1)から式(5)を導出するにあたり病床

数は連続と仮定して、式(1)を微分した。現実的には、病床数は離散的であるので差分をとることが実務として正確である。 $C$ が十分大ならば式(8)は近似式として有効であろう。

本モデルを基本的なモデルとして、以上の4点を考慮するような拡張モデルを構築することが今後の課題ではある。同時に、地域医療を包括的に考えることも必要である。本モデルでは、来院した感染者数が式(5)の $I^*$ を超過すれば入院を断るという条件の下で最適な収益管理としている。そこで、多品目を扱う在庫管理モデル<sup>6)</sup>を応用して、病院の問題を考えた場合、感染者を軽症者と重症者に分離し、感染者の中で重症化する割合を $d$ 、重症患者を相互の受け入れる体制ができて地域では $n$ か所の病院が存在し、病院 $i$ における重症患者の受け入れ可能な病床数を $D_i$ とする。ここで $i = 1, 2, \dots, n$ ある、各病院が上述のモデルに基づいて重症患者の受け入れ数 $I_i^*$ を決定するとし、地域医療の目標と

して、重症患者を相互に受け入れることができない割合を  $\alpha$  未満に設定した場合、確率  $Pr\left\{\sum_{i=1}^n(dX_i - I_i^*) > \sum_{i=1}^n(D_i - I_i^*)\right\} < \alpha$  が満たされる限り、地域医療施設内での重症感染者を受け入れることが可能な確率は  $(1-\alpha)$  である。このように、地域医療全体を考慮したモデルへの発展というのも今後の課題である。疫学的エビデンスが明らかでない感染症が蔓延している状況下で、医療機関として限りある病床の収益管理をおこなうことは、安定した経営組織として医療提供体制を維持するための 1 つの柱であると思われる。

ing Corporation, 10, pp.306-314, 2009.

## 参考文献

- 1) Phillips, R.L : Pricing and Revenue Optimization, Stanford University Press, 2005.
- 2) Talluri, K.T. and van Ryzin, G.J : The Theory and Practice of Revenue Management, Springer Science & Business Media, 2004.
- 3) Sawaki, K : An analysis of airline seat allocation, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 32(4), pp.411-419, 1989.
- 4) Sato, K. and Sawaki, K : A continuous-time seat allocation model with up-down resets, In: T. Dohi, S. Osaki and K. Sawaki (Eds.), *Recent Advances in Stochastic Operations Research II*, World Scientific, pp.99-113, 2009.
- 5) 脇長宏行, 澤木勝茂 : 特価期間を考慮する季節商品の最適発注モデル, *日本経営数学会誌*, 第 28 巻, 第 2 号, pp.73-82, 2006.
- 6) Wakinaga, H. and Sawaki, K : A Multi-Item Inventory Control Model for Perishable Items with Two Shelves, *Lecture Note in Operations Research, Operations Research and Its Applications*, World Publish-